

УДК 622.271.3

**ТАТААЛ КОНФИГУРАЦИЯДАГЫ
МАНИПУЛЯТОРДУН ТОГООЛОРУНУН ИЙИН
КҮЧТӨРҮНҮН ИНЕРЦИЯСЫН
ЭКСПЕРИМЕНТАЛДЫК АНЫКТОО**

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ
МАНИПУЛЯТОРА СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ**

**EXPERIMENTAL DETERMINATION OF MOMENTS
OF INERTIA MANIPULATOR LINKS OF COMPLEX
CONFIGURATION**

В. Э. Еремьянц, Ж. Т. Таалайбекова
V. E. Eremyants, Zh. T. Taalaibekova

Татаал конфигурациядагы чоң чет өлчөмдүү нерселердин инерция ийин күчтөрүн аныктоосунун эксперименталдык ыкмасы каралат, атап айтканда, катуу нерселерди талкалоо үчүн экскаватордун манипуляторуна балка илинген тогоолору. Теңдештирүүчү механизмдерде мурда колдонулган массаларды алмаштыруу ыкмасы механизмдердин динамикалык моделдерин түзүүдө чоң ката кетириши мүмкүн экени көрсөтүлгөн. Инерция ийин күчтөрү белгилүү болгон татаал конфигурациядагы нерсенин жана жөнөкөй нерсенин кичирейтилген моделинин термелүү ийин күчтөрүн салыштыруунун негизинде чоң өлчөмдөгү бөлүктөрдүн инерция ийин күчтөрүн аныктоонун эксперименталдык ыкмасы сунушталды. Эксперименттик ыкма менен инерция ийин күчүн аныктоочу сынаманын конструкциясынын сыпаттамасы берилип, сунуш кылынган ыкма менен инерция ийин күчүн аныктоодо кетирилген катага баа берилет. Мисалы, сунуш кылынган ыкма менен инерция ийин күчүн аныктоодо салыштырмалуу ката 1%-дан ашпаганын көрсөтүп турат.

Рассматривается экспериментальный метод определения моментов инерции крупногабаритных тел сложной конфигурации, в частности, звеньев манипуляторов экскаваторов, на которые навешиваются молоты для разрушения прочных сред. Показано, что используемый ранее при уравнивании механизмов метод заменяющих масс может давать большую погрешность при составлении динамических моделей механизмов. Предлагается экспериментальный метод определения моментов инерции крупногабаритных деталей, основанный на сравнении периодов собственных колебаний уменьшенной модели тела сложной конфигурации

и простого тела, момент инерции которого заранее известен. Приведено описание конструкции стенда для определения момента инерции экспериментальным методом и выполнена оценка погрешности определения момента инерции предлагаемым методом. На примере показано, что относительная погрешность в определении момента инерции предлагаемым методом не превышает 1%.

An experimental method is considered for determining the moments of inertia of large bodies of complex configuration, in particular, links of excavator manipulators, on which hammers are hung to destroy solid media. It is shown that the method of replacing masses used earlier in balancing mechanisms can give a large error when compiling dynamic models of mechanisms. An experimental method is proposed for determining the moments of inertia of large-sized parts, based on a comparison of the periods of natural oscillations of a reduced model of a body of complex configuration and a simple body, the moment of inertia of which is known in advance. A description of the design of the stand for determining the moment of inertia by the experimental method is given, and an estimate of the error in determining the moment of inertia by the proposed method is made. The example shows that the relative error in determining the moment of inertia by the proposed method does not exceed 1%.

Түйүн сөздөр: экскаватор манипулятору; татаал конфигурациядагы тогоо; тогоонун ийин күчү; эксперименталдык ыкмасы.

Ключевые слова: манипулятор экскаватора; звено сложной конфигурации; момент инерции звена; экспериментальный метод.

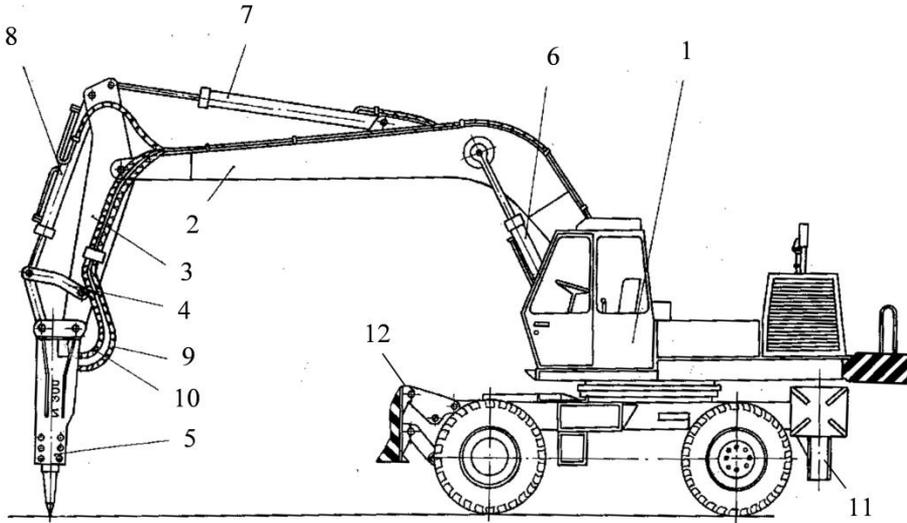
Keywords: excavator manipulator; complex configuration link; link moment of inertia; experimental method.

При анализе динамики манипуляторов горных и строительных машин с навесными молотами необходимо знать массовые и инерционные характеристики звеньев манипулятора: их массу и координаты центра тяжести, а также моменты инерции звеньев относительно их осей вращения. Зачастую звенья манипулятора, например стрела и рукоять (рис. 1), имеют сложную конфигурацию.

При составлении математической модели для исследования динамики манипулятора необходимо знать координаты центров тяжести этих звеньев и их моменты инерции относительно осей вращения.

В настоящее время существуют программы, позволяющие определить координаты центра тяжести звена любой конфигурации. Это можно определить и экспериментально, подвесив звено за две

различные точки и проведя из этих точек линии по направлению сил тяжести. Точка пересечения этих линий соответствует координатам центра тяжести звена.



1 – экскаватор; 2 – стрела; 3 – рукоять; 4 – тяга; 5 – гидравлический молот; 6, 7, 8 – гидроцилиндры; 9, 10 – напорная и сливная магистрали.

Рисунок 1 – Схема гидравлической отбойной машины

Значительно сложнее найти момент инерции звена сложной конфигурации относительно его оси вращения. Это приводит к необходимости упрощения математической модели, используя, например, известный метод замещающих масс, применяемый при уравнивании механизмов [1]. Суть этого метода заключается в том, что масса всего звена распределяется по крайним кинематическим парам обратно пропорционально расстоянию от центра тяжести до этих пар. Такой подход при анализе динамики манипуляторов был использован ранее в работах [2, 3].

Однако следует признать, что этот подход может давать большую погрешность. Например, допустим, что звено представляет собой однородный стержень постоянного сечения массой m и длиной l , вращающийся вокруг неподвижной оси A (рис. 2, а). Центр тяжести стержня лежит в его середине. Следовательно, в соответствии с методом замещающих масс масса стержня должна быть распределе-

на поровну между двумя его концами, как показано на рисунке 2, б. При этом момент инерции части массы, расположенной в точке A , равен нулю, а момент инерции массы, расположенной в точке B , равен $ml^2/2$.

Но известно [4], что момент инерции стержня относительно его центра масс равен $ml^2/12$, а относительно края стержня – $ml^2/3$. Следовательно, использование метода замещающих масс в данном случае дает результат, отличающийся от точного в полтора раза.

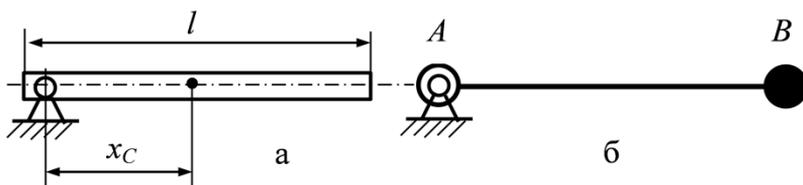


Рисунок 2 – Определение момента инерции стержня относительно его оси вращения методом замещающих масс

Поэтому в случае звена сложной конфигурации для определения его момента инерции относительно оси вращения приходится делить звено на отдельные простые фигуры, моменты инерции которых относительно их центров тяжести и координаты центров тяжести известны (параллелепипеды, конусы, сферы, цилиндры и т.д.), а затем находить момент инерции всего звена относительно оси его вращения по формуле:

$$J_{\Sigma} = \sum_1^n (J_i + m_i l_i^2), \quad (1)$$

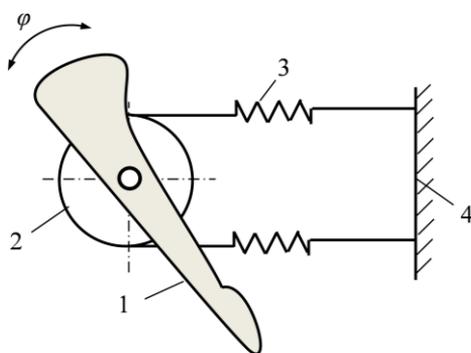
где J_i , m_i – соответственно момент инерции и масса i – той фигуры относительно её центра масс; l_i – расстояние от центра масс i – той фигуры до оси вращения всего звена.

Например, если звено имеет форму равнобедренной трапеции высотой h , верхним основанием, равным a , и нижним основанием, равным $3a$, то его момент инерции относительно середины нижнего основания, определенный по формуле (1), равен $0,469mh^2$. При использовании метода замещающих масс момент инерции относительно той же точки равен $0,417mh^2$.

Расхождение в результатах расчета в этом случае равно 1,125, что меньше, чем в случае стержня постоянного сечения.

Но при сложной конфигурации звена, когда необходимо делить его на много элементарных фигур, процесс определения его момента инерции относительно оси вращения требует больших затрат времени. При этом происходит накопление ошибок в расчетах.

В этих случаях удобнее воспользоваться экспериментальным методом определения момента инерции сложного звена относительно его оси вращения, использованного, например, в работе [5]. Этот метод основан на сравнении периодов собственных колебаний исследуемого звена T и эталонного звена $T_э$, момент инерции которого заранее известен, при неизменном коэффициенте жесткости колебательной системы.



- 1 – исследуемое звено, 2 – платформа
стенда, 3 – упругие связи,
4 – станина стенда.

Рисунок 3 – Схема экспериментально-го стенда для определения момента инерции звена сложной формы

Суть метода заключается в следующем. Исследуемое звено 1 (рис. 3) жестко закрепляется на платформе 2 экспериментального стенда, которая связана гибкими элементами 3 со станиной стенда 4. Платформа поворачивается на некоторый угол φ и отпускается. При этом происходят собственные колебания платформы с исследуемым звеном относительно её оси вращения.

Фиксируется время нескольких циклов колебаний t_n (обычно $n= 8...10$), и определяется период T собственных колебаний платформы с исследуемым звеном:

$$T = t_n / n .$$

Затем на платформе закрепляется эталонное звено, момент инерции которого заранее известен. Например, диск с массой m и

радиусом R . Его момент инерции относительно оси вращения известен и равен:

$$J_3 = mR^2 / 2.$$

Снова фиксируется время нескольких циклов колебаний, и определяется период T_3 собственных колебаний эталонного звена

$$T_3 = t_3 / n.$$

Периоды собственных колебаний станда с установленными на него звеньями связаны с их моментами инерции соотношениями:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_3}{c}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{c}},$$

где c – коэффициент жесткости упругих элементов станда, Н/м; J_0 , J_3 , J – соответственно моменты инерции платформы с её осью, эталонного звена и звена, момент инерции которого следует определить, кг·м².

Из отношения T/T_3 находится искомый момент инерции звена сложной формы:

$$J = (T / T_3)^2 (J_0 + J_3) - J_0. \quad (2)$$

Обычно для уменьшения погрешности определения момента инерции тела стараются уменьшить момент инерции самого станда J_0 . С этой целью платформу делают из легкого материала, например, пластмассы, и, насколько это возможно, уменьшают диаметр платформы.

В качестве примера приведем конструкцию станда, разработанного в Кыргызско-Российском Славянском университете (рис. 4) [5].

Станд состоит из станины 1, на которой закреплен подшипниковый узел 2, состоящий из вала 3, опирающегося на шариковые подшипники 4. На валу закреплен блок 5, на который намотан резиновый жгут 6, связанный со стойкой 7. Стойка может перемещаться по направляющей 8 и закрепляться на ней с помощью зажимающего устройства 9, 10. Это устройство обеспечивает необходимое предварительное натяжение жгута.

На верхнем конце вала расположена оправка 11, на которую устанавливается исследуемое или эталонное звено 12 и фиксируется с помощью шайбы 13 и гайки 14. Угол поворота исследуемого звена контролируется по шкале 15, закрепленной на крышке подшипникового узла. Шкала может поворачиваться относительно продольной оси вала и фиксироваться в нужном положении с помощью винта 16.

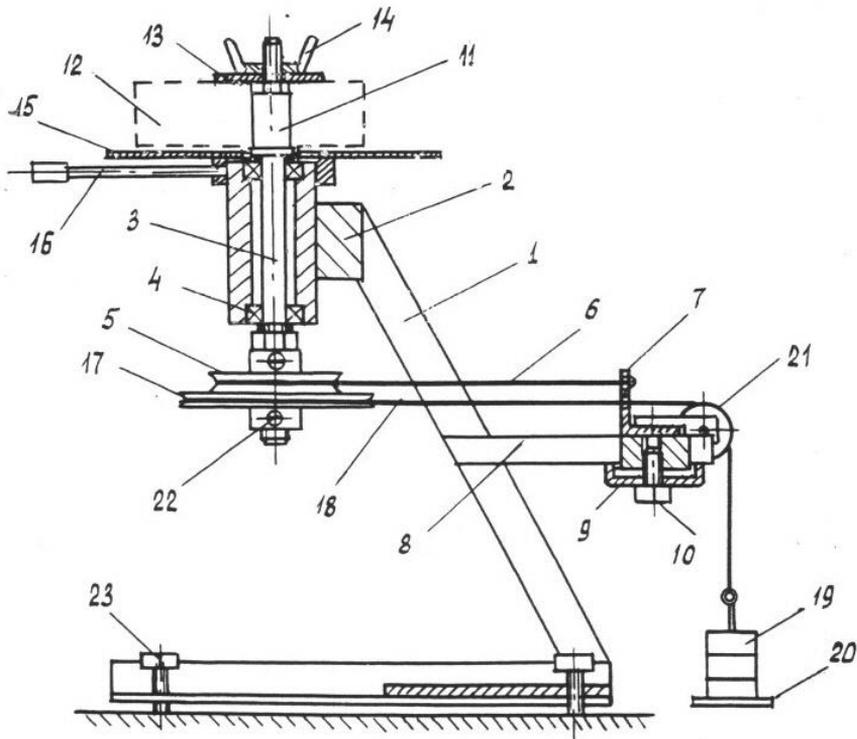


Рисунок 4 – Стенд для определения моментов инерции тел сложной конфигурации и коэффициентов жесткости упругих звеньев [5]

Для определения угловой жесткости стенда он оснащен дополнительным шкивом 17 и тросом 18 с грузовой платформой 20, на которую устанавливаются грузы 19. Трос наматывается на шкив и перекидывается через блок 21. Крепление блока 5 и шкива 17 на валу осуществляется винтами 22. Для установки стенда в строго горизонтальном положении служат регулировочные винты 23.

Поскольку звенья манипулятора имеют большие размеры и массы, то для определения их моментов инерции с помощью описанного экспериментального метода необходимо сделать модели этих звеньев в масштабах, удобных для размещения на стенде. Определив момент инерции модели, можно умножением на соответствующий коэффициент перейти от модели к реальной детали. Определим этот коэффициент на примере.

Допустим, например, для детали массой m размерами l и плотностью материала ρ сделана модель в масштабе μ из материала, удельная плотность которого в λ раз меньше реальной плотности детали. Здесь $\mu = l / l_M$, $\lambda = \rho / \rho_M$.

Так как масса реальной детали пропорциональна её размерам в кубе, умноженная на плотность, а момент инерции пропорционален массе, умноженной на размер в квадрате:

$$m \sim \rho l^3; \quad J \sim ml^2 \sim \rho l^5,$$

то для модели эти соотношения запишутся в виде

$$m_M \sim \frac{\rho l^3}{\lambda \mu^3}; \quad J_M \sim \frac{\rho l^5}{\lambda \mu^5} \quad \text{или} \quad J_M \sim \frac{J}{\lambda \mu^5}. \quad (3)$$

Из этих соотношений следует, что для определения момента инерции реальной детали J необходимо момент инерции модели J_M умножить на коэффициент, равный $\lambda \mu^5$:

$$J = J_M \lambda \mu^5. \quad (4)$$

Например, если модель стрелы манипулятора экскаватора выполнена из стали в масштабе 1:20, то $\lambda = 1$, $\mu = 20$, то момент инерции реального звена будет равен $32 \cdot 10^5 J_M \text{ кгм}^2$.

При любом эксперименте на получаемые результаты оказывают влияние различные случайные факторы, которые невозможно предугадать. Поэтому обычно эксперимент проводится неоднократно (например, не менее 5 раз), а затем из полученных результатов вычисляется среднее значение определяемого параметра и возможные отклонения от этого значения.

Оценка погрешности определения момента инерции звена

Отклонения экспериментальных данных от среднего значения коэффициента жесткости стенда обусловлены различными факторами, которые можно разделить на две группы.

Первую группу образуют факторы, связанные с неточностью установки стенда в горизонтальном положении, случайные факторы, проявляющиеся в процессе проведения эксперимента. Например, случайное изменение сил трения в опорах вала, заедание троса в направляющих канавках и т.д.

Вторая группа факторов связана с ошибкой измерений различных величин в процессе эксперимента, которая определяется точностью измерительных приборов. Если точность приборов известна, то максимальная погрешность, которая может быть внесена этой группой факторов, определяется расчетом по известным методикам.

Например, если на основании экспериментальных исследований определяется какой-либо параметр Y , который является функцией нескольких измеряемых параметров x_i :

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

а каждый из параметров x_i измеряется с некоторой абсолютной погрешностью Δx_i , то абсолютная погрешность величины Y определится по формуле [6]

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial Y}{\partial x_3} \Delta x_3 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial x_n} \Delta x_n. \quad (5)$$

Из формулы (1) следует, что для определения момента инерции исследуемого звена достаточно знать момент инерции эталонного звена и измерить периоды собственных колебаний стенда с эталонным и с исследуемым звеном. В качестве эталонного звена используется диск с центральным отверстием для установки на экспериментальный стенд. Масса диска может быть определена на аналитических весах с точностью до 0,5 г, а размеры измерены с помощью штангенциркуля с точностью до 0,1 мм. Момент инерции эталонного диска с массой $m_э$, внешним диаметром D и внутренним диаметром d определяется по формуле:

$$J_3 = 0,125m_3(D^2 + d^2). \quad (6)$$

Он зависит от трех измеряемых параметров. Следовательно, абсолютная погрешность определения момента инерции в соответствии с формулой (5) запишется в виде:

$$\Delta J_3 = \frac{\partial J_3}{\partial m_3} \Delta m_3 + \frac{\partial J_3}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial J_3}{\partial d} \Delta d. \quad (7)$$

После определения частных производных функции (7) деления её левой и правой частей на J_3 , обозначая $d/D = \xi$, получим уравнение относительных погрешностей ε :

$$\varepsilon_{J_3} = \varepsilon_m + \frac{4}{1 + \xi^2} \varepsilon_D + \frac{2\xi^2}{1 + \xi^2} \varepsilon_d. \quad (8)$$

Допустим, что эталонное звено имеет внешний диаметр 125 мм, внутренний 25 мм, толщину 10 мм. Эти параметры измеряются штангенциркулем с ценой деления 0,1 мм. Масса эталонного звена равна 1 кг и определяется на аналитических весах с погрешностью 0,5 г:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{1} = 0,5 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_D = \frac{\Delta D}{D} = \frac{0,1}{125} = 0,8 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,1}{25} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Подставляя эти значения в формулу (8) и учитывая, что $\xi = 0,2$, получим:

$$\varepsilon_{J_3} = 3,885 \cdot 10^{-3}; \quad \Delta J_3 = J_3 \varepsilon_{J_3} = 7,284 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_3 = (1,875 \pm 0,007) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Из полученного результата следует, что погрешность определения момента инерции по формуле (6) не превышает 0,37 %. В принципе точность измерения диаметра штангенциркулем может составлять $\pm 0,05$ мм, а точность определения массы на аналитических весах $\pm 0,1$ г. При этом погрешность определения момента инерции, обусловленная средствами измерений, будет еще меньше.

Аналогично сказанному выше, относительная погрешность определения величины исследуемого звена определяется по формуле

$$\varepsilon_J = 2(\varepsilon_T + \varepsilon_{T_3}) + \varepsilon_{J_3},$$

где $\varepsilon_T, \varepsilon_{T_3}$ – соответственно относительные погрешности измерений периодов колебаний исследуемого и эталонных звеньев.

В настоящее время стенд подготовлен для определения моментов инерции звеньев манипуляторов экскаваторов отбойных агрегатов.

Литература

1. Теория механизмов и машин. Учеб. для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др. Под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.
2. Еремьянц В. Э., Райымбекова Г. М. Динамика манипулятора экскаватора ЭО-2621 с навесным молотом МО-100 [Текст] / В. Э. Еремьянц, Г. М. Райымбекова // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2020. – № 8. – С. 33–40.
3. Еремьянц В. Э., Султаналиев Б. С. Динамика манипулятора экскаватора ЭО-2621 с навесным молотом «Импульс-100» [Текст] / В. Э. Еремьянц, Б. С. Султаналиев // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA. SRSMS. Amazon KDR. 2020 – Issue 22. – P. 32–39.
4. Фаворин М. В. Моменты инерции тел. [Текст] / М. В. Фаворин, – М.: Машиностроение, 1970. – 312 с.
5. Еремьянц В. Э., Зайцев В. Ф. Лабораторный практикум по дисциплине «Динамика машин». Часть 1. Экспериментальное определение коэффициентов жесткостей и моментов инерции звеньев механизмов. [Текст] / В. Э. Еремьянц, В. Ф. Зайцев – Бишкек, КРСУ, 2002. – 1 с.
6. Папазов М. Г., Могильный С. Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. М. Г. Папазов, С. Г. Могильный – М.: Недра, 1968. – 302 с.